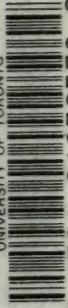


UNIVERSITY OF TORONTO



3 1761 01078579 8

Charlier, Carl Vilhelm
Ludwig
Eine neue Methode zur
Behandlung des Rotations-
problems

QB
362
C43



PURCHASED FOR THE
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
FROM THE
CANADA COUNCIL SPECIAL GRANT
FOR
HIST SCI '68

J. Brandt.

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK

UTGIVET AF

K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM

BAND 4. N:o 4.

MEDDELANDE FRÅN LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

EINE NEUE METHODE
FÜR BEHANDLUNG DES ROTATIONSPROBLEMS

VON

C. V. L. CHARLIER

MIT 2 TEXTFIGUREN

UPPSALA & STOCKHOLM

ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN

LONDON

PARIS

FRIEDLÄNDER & SOHN
11 CARLSTRASSE

WILLIAM WESLEY & SON
28 ESSEX STREET, STRAND

LIBRAIRIE C. KLINCKSIECK
11 RUE DE LILLE

1908

Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.

No 31

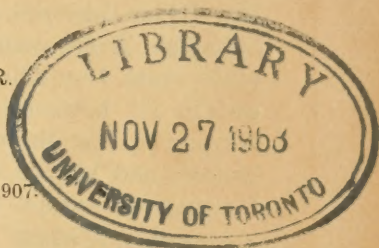
Eine neue Methode zur Behandlung des Rotationsproblems.

Von

C. V. L. CHARLIER.

Mit 2 Textfiguren.

Eingereicht am 9. Oktober 1907.



Schon POISSON führte bei der Behandlung des Rotationsproblems die Methode der Variation der Constanten ein, und gelang dadurch zu Differentialgleichungen für das Problem, die ganz analoger Natur waren wie die bekannten Differentialgleichungen für das Drei-Körper-Problem. In seiner »Théorie analytique du système du Monde« ist PONTÉCOULANT von den POISSON'schen Differentialgleichungen ausgegangen um die Theorie der Rotation der Planeten zu untersuchen. Er hat aber thatsächlich kaum einen Gebrauch dieser Differentialgleichungen gemacht, sondern kommt bei der Behandlung der Frage von der Rotation der Erde und des Mondes auf die gewöhnlichen von LAGRANGE und LAPLACE benutzten Integrationsmethoden zurück. Hierdurch geht aber jede Analogie mit dem Problem der drei Körper verloren, und man kann nicht die vielen tiefgehenden Untersuchungen über dieses Problem für das Rotationsproblem verwerthen, was aber möglich ist, wenn man in consequenter Weise die Methode der Variation der Constanten durchführt.

Die Erklärung dieses Mangels an Consequenz in der Behandlung des Rotationsproblems ist übrigens unschwer zu finden. Das ungestörte Rotationsproblem ist nämlich bedeutend mehr verwickelt als die ungestörte elliptische Bewegung, die bei der Behandlung des Drei-Körper-Problems zum Ausgangspunkt gewählt wird. Die mathematischen Schwierigkeiten sind zwar nicht grösser in dem einen Problem als in dem anderen; sind aber die drei Trägheitsmomente von einander verschieden — wie beispielsweise beim Mond — so sind die nothwendigen Entwicklungen sehr umständlich und die Ableitung des Ausdruckes für die Störungfunction wird sehr lästig.

In meinen Vorlesungen dieses Jahres über die Rotation der Himmelskörper habe ich diese Schwierigkeiten in sehr einfacher Weise vermieden. Als »intermediäre Bahn« — um einen vom Drei-Körper-Problem geliehenen Ausdruck zu benutzen — betrachte ich die Rotation eines *kugelförmigen* Körpers. Die Bewegungsverhältnisse sind dann möglichst einfach und hängen von 6 willkürlichen Constanten ab. Diese Constanten werden dann variirt, so dass man den Abweichungen des Körpers von der Kugelgestalt und den äusseren Kräften Rechnung trägt. Das Potential der äusseren Kräfte lässt sich durch diese Veränderlichen in *endlicher* Form ausdrücken; übrigens sind die Bewegungsgleichungen ganz ähnlichen Art wie im Drei-Körper-Problem.

Der Gang der Rechnung ist die folgende:

1) Zuerst betrachtet man die Bewegung einer *kugelförmigen* Körpers und drückt das Integral durch sechs unabhängige Constanten aus.

2) Zweitens variirt man diese Constanten, so dass die Abweichungen von der Kugelform und die äusseren Kräfte berücksichtigt werden.

Ich will nach einander folgende drei Probleme untersuchen:

I. Rotation eines kugelförmigen Körpers.

II. Rotation eines beliebigen festen Körpers ohne Einwirkung äusseren Kräfte.

III. Gleichzeitige Berücksichtigung der Abweichungen von der Kugelgestalt und der Einwirkung äusseren Kräfte.

In diesen Aufsätze wird das erste dieser Probleme behandelt und werden die allgemeinen Variationsgleichungen aufgestellt.

Die Bewegungsgleichungen, die wir bei der Betrachtung des Problems benutzen wollen, sind die folgenden.

Die Coordinaten einer Massenelements des Körpers bezogen auf im Raume festliegende Achsen, mit dem Anfangspunkt im Schwerpunkt des Körpers bezeichnen wir mit X, Y, Z .

Die Coordinaten desselben Massenelements in Bezug auf drei mit den Körper festverbundene Achsen bezeichnen wir mit x, y, z . Diese Achsen denken wir uns mit den drei Hauptträgheitsachsen des Körpers zusammenfallend. Die Trägheitsmomente um die Achsen x, y, z bezeichnen wir bez. mit A, B und C .

Die Lage der beiden Achsensysteme zu einander wird durch drei EULER'sche Winkel φ, θ und ψ bestimmt, deren geometrische Bedeutung aus der Figur 1 hervorgeht. Man hat

$$\begin{aligned}\psi &= B' X, \\ \theta &= z Z, \\ \varphi &= B' x.\end{aligned}$$

Die Wahl der EULER'schen Winkel ist übereinstimmend mit TISSERAND getroffen, um directe Vergleichung mit seinen Formeln zu erhalten.

Indem wir die Bewegungsgleichungen in canonicischer Form schreiben, werden φ, θ und ψ als q -Coordinaten gewählt, so dass

$$q_1 = \varphi, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \psi$$

und für die entsprechenden p -Coordinaten erhält man die Ausdrücke

$$\begin{aligned}p_1 &= C \left[-\cos \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \right], \\ p_2 &= (B - A) \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \frac{d\psi}{dt} + (B \sin^2 \varphi + A \cos^2 \varphi) \frac{d\theta}{dt}, \\ p_3 &= [A \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + B \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta] \frac{d\psi}{dt} \\ &\quad + (B - A) \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ &\quad - C \cos \theta \frac{d\varphi}{dt}.\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3)$$

wo die *characteristische Function* H die Form

$$H = T - U$$

hat, wo T die lebendige Kraft des rotirenden Körpers und U das Potential der äusseren Kräfte ist. Für T hat man den Ausdruck

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2A} \left[(p_1 \cos \theta + p_3) \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} - p_2 \cos \varphi \right]^2 \\ &+ \frac{1}{2B} \left[(p_1 \cos \theta + p_3) \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} + p_2 \sin \varphi \right]^2 \\ &+ \frac{1}{2C} p_1^2. \end{aligned}$$

[Man vergleiche TISSERAND: *Traité de Mécanique céleste*, II s. 380].

Indem wir die Grössen

$$(2) \quad k_1 = \frac{C-A}{A}, \quad k_2 = \frac{C-B}{B}$$

einführen, können wir T in der Form

$$\begin{aligned} 2CT &= \frac{p_1^2 + p_3^2 + 2p_1 p_3 \cos \theta}{\sin^2 \theta} + p_2^2 \\ &+ k_1 \left[(p_1 \cos \theta + p_3) \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} - p_2 \cos \varphi \right]^2 \\ &+ k_2 \left[(p_1 \cos \theta + p_3) \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} + p_2 \sin \varphi \right]^2 \end{aligned}$$

schreiben.

Wird

$$(3) \quad T = T_0 + k_1 T_1 + k_2 T_2$$

gesetzt, so hat man also

$$\begin{aligned}
 2 C T_0 &= \frac{p_1^2 + p_3^2 + 2 p_1 p_3 \cos \theta}{\sin^2 \theta} + p_2^2, \\
 (4) \quad 2 C T_1 &= \left[(p_1 \cos \theta + p_3) \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} - p_2 \cos \varphi \right]^2, \\
 2 C T_2 &= \left[(p_1 \cos \theta + p_3) \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} + p_2 \sin \varphi \right]^2.
 \end{aligned}$$

Was endlich die Potentialfunction U betrifft, so hat sie die Form

$$(5) \quad U = \frac{3}{2} \frac{\mu}{r^3} [A k_1 \cos^2 \alpha + B k_2 \cos^2 \beta],$$

wo α , β (und γ) die Winkel bezeichnen, welche der Radius Vector r des störenden Körpers mit den Hauptträgheitsachsen A , B (und C) bilden.

Sind mehrere störenden Körper vorhanden, kommt im Ausdrucke für U eine Summe von Gliedern vor, welche alle die obige Form haben.

Nach diesen einleitenden Betrachtungen gehen wir zur Behandlung des Rotationsproblems über.

Rotation eines kugelförmigen Körpers.

Hier ist $k_1 = k_2 = 0$. Folglich verschwindet U und man bekommt

$$(6) \quad H = T_0 = \frac{p_1^2 + p_3^2 + 2 p_1 p_3 \cos \theta}{2 C \sin^2 \theta} + \frac{p_2^2}{2 C}.$$

Das Problem der Rotation eines kugelförmigen Körpers ist ja ein sehr einfaches. Bekanntlich ist die Lösung, dass der Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit um eine Achse rotirt, die im Raume und im Körper eine feste Lage hat. Wir müssen indessen mit einiger Ausführlichkeit auf die geometrischen Einzelheiten dieses Rotationsproblems eingehen, um eine klare Vorstellung der Integrationsconstanten zu erhalten, welche wir der folgenden Behandlung der Rotationsprobleme zu Grunde legen werden.

Die Differentialgleichungen der Bewegung

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial T_0}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial T_0}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3)$$

wollen wir mit Hülfe der HAMILTON-JACOBI'schen partiellen Differentialgleichung integrieren. Diese lautet

$$(7) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + T_0 = 0$$

oder

$$(7^*) \quad 0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2C \sin^2 \theta} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial q_3} \right)^2 + 2 \frac{\partial V}{\partial q_1} \frac{\partial V}{\partial q_3} \cos \theta \right] + \frac{1}{2C} \left(\frac{\partial V}{\partial q_2} \right)^2.$$

Ist

$$V = V(t; q_1, q_2, q_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

ein Integral dieser Gleichung, wo α_1 , α_2 und α_3 drei unabhängige Integrationsconstanten bezeichnen, so erhält man die Integrale von (1) aus den Relationen:

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} &= \beta_i, \\ \frac{\partial V}{\partial q_i} &= p_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3)$$

wo β_1 , β_2 und β_3 drei neue Integrationsconstanten bezeichnen.

Da die Gleichung (7*) die Grössen t , q_1 und q_3 nicht explicite enthält, so können wir die Substitution

$$(9) \quad V = -ht + \alpha_1 q_1 + \alpha_3 q_3 + W$$

machen, wo h , α_1 und α_3 drei Integrationsconstanten bezeichnen. Zur Bestimmung von W erhalten wir die Relation

$$\frac{\alpha_1^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_3 \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 = 2hC.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass h eine positive Grösse ist, vorausgesetzt dass α_1 und α_3 reelle Constanten sind. Wir setzen demnach

$$(10) \quad \alpha_2^2 = 2hC,$$

wo α_2 unter den genannten Voraussetzungen eine reelle Grösse bezeichnet. Für W erhalten wir den Ausdruck

$$(11) \quad W = \int \frac{d\theta}{\sin \theta} \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3 \cos \theta - \alpha_2^2 \cos^2 \theta}.$$

Nach (8) erhalten wir hieraus folgende Gleichungen zur Bestimmung der EULER'schen Winkel:

$$(12) \quad \begin{aligned} \varphi &= \beta_1 - \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1 + \int \frac{(\alpha_1 + \alpha_3 \cos \theta) d\theta}{\sin \theta \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3 \cos \theta - \alpha_2^2 \cos^2 \theta}}, \\ \psi &= \beta_3 - \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \beta_3 + \int \frac{(\alpha_3 + \alpha_1 \cos \theta) d\theta}{\sin \theta \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3 \cos \theta - \alpha_2^2 \cos^2 \theta}}, \\ &\quad \cdot \int \frac{\alpha_2 \sin \theta d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3 \cos \theta - \alpha_2^2 \cos^2 \theta}} = \frac{\alpha_2}{C} t + \beta_2. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung giebt uns θ als Function der Zeit. Aus den zwei ersten Gleichungen lassen sich dann φ und ψ explicite als Functionen der Zeit darstellen.

Für p_1 , p_2 und p_3 erhalten wir die Ausdrücke

$$(13) \quad \begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial V}{\partial q_1} = \alpha_1, \\ p_3 &= \frac{\partial V}{\partial q_3} = \alpha_3, \\ p_2 &= \frac{\partial V}{\partial q_2} = \sqrt{\frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_3 \cos \theta - \alpha_2^2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Zur Ausführung der Integrationen setzt man

$$\cos \theta = x$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 a_1; \quad \alpha_3 = \alpha_2 a_3$$

und erhält zur Bestimmung von x

$$(14) \quad - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-a_1^2-a_2^2-2a_1a_2x-x^2) \cdot C^2 t^2 + J_2}}$$

welche Gleichung unmittelbar zeigt, dass x zwischen zwei reellen Grenzen schwankt. Diese Grenzen sind mit den Wurzeln der Gleichung

$$0 = 1 - a_1^2 - a_2^2 - 2a_1a_2x - x^2$$

zusammenfallend. Die Wurzeln sind

$$-a_1a_2 \pm \sqrt{(1-a_1^2)(1-a_2^2)}$$

Um reelle Lösungen zu erhalten ist erforderlich, dass x reell und kleiner als die Einheit ist. Hieraus folgt, dass sowohl a_1 wie a_2 kleiner als die Einheit sind. Wir können also setzen

$$(15) \quad a_1 = \cos \theta_0; \quad a_2 = \cos \varepsilon,$$

wo unter θ_0 und ε zwei reelle Winkel verstanden werden. Die Grenzen für x sind dann

$$\begin{aligned} & \cos(\varepsilon - \theta_0) \text{ und} \\ & \cos(\varepsilon + \theta_0), \end{aligned}$$

so dass θ zwischen $\varepsilon - \theta_0$ und $\varepsilon + \theta_0$ schwankt.

Wir lassen die untere Grenze in (14) mit der Wurzel $\cos(\varepsilon - \theta_0)$ zusammenfallen, und erhalten also das Integral der Gleichung (14) in der Form

$$\cos \theta = x = \cos \theta_0 \cos \varepsilon + \sin \theta_0 \sin \varepsilon \cos \left(\frac{\alpha_2}{C^2} t + J_2 \right).$$

Ich führe noch die Bezeichnungen

$$(16) \quad \begin{aligned} a_1 &= J_1, \\ a_2 &= \left(\frac{\alpha_2}{C^2} t + J_2 \right), \\ a_3 &= J_3, \end{aligned}$$

ein, so dass

$$(17) \quad \cos \theta = \cos \theta_0 \cos \varepsilon + \sin \theta_0 \sin \varepsilon \cos a_2$$

ist.

Weiter hat man

$$\frac{a_2 d\theta \sin \theta}{\sqrt{a_2^2 - a_1^2 - a_3^2 - 2a_1 a_3 \cos \theta - a_2^2 \cos^2 \theta}} = du_2,$$

so dass die Gleichungen für q und u lauten

$$(18) \quad \begin{aligned} q + u_1 &= - \int \frac{a_1 + a_3 \cos \theta}{\sin^2 \theta} du_2, \\ u + u_3 &= - \int \frac{a_3 + a_1 \cos \theta}{\sin^2 \theta} du_2 \end{aligned}$$

wo der Ausdruck (17) für $\cos \theta$ einzuführen ist.

Zur Ausführung der Integrationen beachten wir, dass

$$\frac{a_1 - a_3 \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{2} \frac{a_1 + a_3}{1 - \cos \theta} + \frac{1}{2} \frac{a_1 - a_3}{1 + \cos \theta},$$

$$\frac{a_3 + a_1 \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{2} \frac{a_1 + a_3}{1 - \cos \theta} - \frac{1}{2} \frac{a_1 - a_3}{1 + \cos \theta},$$

und hier ist

$$\frac{du}{1 - \cos \theta} = \frac{du}{1 + a_1 a_3 + \sqrt{(1 - a_1^2)(1 - a_3^2)} \cos u}$$

$$\frac{du}{1 + \cos \theta} = \frac{du}{1 - a_1 a_3 - \sqrt{(1 - a_1^2)(1 - a_3^2)} \cos u}.$$

Da man für a_1^2 und a_3^2 kleiner als die Einheit immer

$$\sqrt{(1 - a_1^2)(1 - a_3^2)} < 1 \pm a_1 a_2$$

hat, so kann man sich hier der Integralformel

$$\int \frac{du}{1 - e \cos u} = \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u \right]$$

bedienen, wo $e < 1$ vorausgesetzt wird.

Wir bezeichnen die Grenzen, zwischen denen die Grösse $\cos \theta$ schwankt mit ϱ_1 und ϱ_2 , so dass

$$(19) \quad \begin{aligned} \varrho_1 &= -a_1 a_3 + \sqrt{(1 - a_1^2)(1 - a_3^2)} = \cos(\varepsilon - \theta_0), \\ \varrho_2 &= -a_1 a_3 - \sqrt{(1 - a_1^2)(1 - a_3^2)} = \cos(\varepsilon + \theta_0). \end{aligned}$$

Wir bekommen dann nach einiger Rechnung

$$\int \frac{du}{1 - \cos \theta} = \frac{2}{|a_1 + a_2|} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 - q_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} u}{1 - q_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} u}} \right],$$

$$\int \frac{du}{1 + \cos \theta} = \frac{2}{|a_1 - a_2|} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 + q_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} u}{1 + q_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} u}} \right].$$

Hier kommen die absoluten Beträge von $a_1 + a_2$ und $a_1 - a_2$ vor, weil der Coefficient der beiden Arctangens immer *positiv* sein muss. Man findet dies am leichtesten, wenn man u gegen $\pm \pi$ wachsen lässt. Dann wächst offenbar die linke Seite gegen $\pm \pi$ und folglich muss dies auch mit der rechten Seite der Fall sein.

Aus (18) bekommen wir nun

$$\begin{aligned} \varphi = u_1 &= \frac{a_1 + a_2}{|a_1 + a_2|} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 - q_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2}{1 - q_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2}} \right] - \\ &= \frac{a_1 - a_2}{|a_1 - a_2|} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 + q_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2}{1 + q_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2}} \right], \\ (20) \quad \psi = u_2 &= \frac{a_1 + a_2}{|a_1 + a_2|} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 - q_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_1}{1 - q_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_1}} \right] + \\ &= \frac{a_1 - a_2}{|a_1 - a_2|} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 + q_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_1}{1 + q_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_1}} \right]. \end{aligned}$$

Wir bekommen also verschiedene Formeln jenachdem $\varepsilon > \theta_0$ oder $\varepsilon < \theta_0$ ist. Für die Erde wie für den Mond hat man, wie wir später finden werden, $\varepsilon > \theta_0$, so dass dann $a_1 + a_2$ und $a_1 - a_2$ *positiv* sind. Dieser Fall ist also astronomisch der wichtigste, und wird uns deswegen hauptsächlich beschäftigen. Ich gebe indessen weiter unter die entsprechenden Formeln für den anderen Fall, und ich werde übrigens zeigen, dass man beide Fälle zu einem einzigen zusammenführen kann.

Lassen uns den Fall

$$(21) \quad \varepsilon > \theta_0,$$

betrachten.

Dann ist nach (21)

$$(21) \quad \begin{aligned} \eta + u_1 &= -\operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 - \varrho_1}{1 - \varrho_2}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2 \right] - \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 + \varrho_1}{1 + \varrho_2}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2 \right], \\ \psi + u_3 &= -\operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 - \varrho_1}{1 - \varrho_2}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2 \right] + \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 + \varrho_1}{1 + \varrho_2}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2 \right]. \end{aligned}$$

Setzt man

$$r_1 = \sqrt{\frac{1 + \varrho_1}{1 + \varrho_2}}, \quad r_2 = \sqrt{\frac{1 - \varrho_1}{1 - \varrho_2}}$$

so können wir diese Relationen auch in der Form

$$(22) \quad \begin{cases} \operatorname{tg}(\eta + u_1) = -\frac{r_2 + r_1}{1 - r_1 r_2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2, \\ \operatorname{tg}(\psi + u_3) = -\frac{r_2 - r_1}{1 + r_1 r_2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2. \end{cases}$$

schreiben.

Für die Entwicklung der Störungfunction im Rotationsproblem brauchen wir verschiedene Relationen, die wir am leichtesten geometrisch erhalten können. Indessen werde ich zuerst aus den Formeln (22) einige Reihenentwicklungen ableiten, die uns im Folgenden vom Nutzen sind.

Führt man für die trigonometrischen Functionen Exponentialfunctionen ein, kann man die Relationen (22) in folgender Form schreiben

$$(22^*) \quad \begin{aligned} e^{2i(\eta+u_1)} &= e^{-2iu_2} \frac{(1 + z_1 e^{iu_2})(1 + z_2 e^{iu_2})}{(1 + z_1 e^{-iu_2})(1 + z_2 e^{-iu_2})}, \\ e^{2i(\psi+u_3)} &= \frac{(1 + z_1 e^{-iu_2})(1 + z_2 e^{iu_2})}{(1 + z_1 e^{iu_2})(1 + z_2 e^{-iu_2})}, \end{aligned}$$

wo

$$z_1 = \frac{1 - r_1}{1 + r_1}; \quad z_2 = \frac{1 - r_2}{1 + r_2}.$$

Wäre

$$\varepsilon < \theta_0$$

hätte man

$$q = u_1 = \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 - \varrho_1}{1 - \varrho_2}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2 \right] = \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 + \varrho_1}{1 + \varrho_2}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2 \right].$$

$$w = u_3 = \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 - \varrho_1}{1 - \varrho_2}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2 \right] + \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 + \varrho_1}{1 + \varrho_2}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2 \right].$$

Folglich ist dann

$$(23) \quad \operatorname{tg}(q + u_1) = \frac{r_2 - r_1}{1 + r_1 r_2 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} u_2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2,$$

$$\operatorname{tg}(w + u_3) = \frac{r_2 + r_1}{1 - r_1 r_2 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} u_2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2$$

und hieraus

$$(24) \quad e^{2i(q+u_1)} = \frac{(1 + z'_1 e^{iu_2})(1 - z'_2 e^{-iu_2})}{(1 + z'_1 e^{-iu_2})(1 + z'_2 e^{iu_2})},$$

$$e^{2i(w+u_3)} = e^{2iu_2} \frac{(1 + z'_1 e^{-iu_2})(1 + z'_2 e^{-iu_2})}{(1 - z'_1 e^{iu_2})(1 + z'_2 e^{iu_2})}.$$

Die Grössen z'_1 und z'_2 sind nicht mit z_1 und z_2 identisch. Man hat in der That zu berücksichtigen dass r_1 und r_2 als *positive* Grössen betrachtet sind. Nun ist aber

für $\varepsilon > \theta_0$

$$r_1 = \frac{\cos \frac{1}{2}(\varepsilon - \theta_0)}{\cos \frac{1}{2}(\varepsilon + \theta_0)}; \quad r_2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(\varepsilon - \theta_0)}{\sin \frac{1}{2}(\varepsilon + \theta_0)}$$

und also

$$z_1 = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_0; \quad z_2 = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \varepsilon \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_0,$$

wogegen

für $\varepsilon < \theta_0$

$$r_1 = \frac{\cos \frac{1}{2}(\theta_0 - \varepsilon)}{\cos \frac{1}{2}(\theta_0 + \varepsilon)}; \quad r_2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(\theta_0 - \varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}(\theta_0 + \varepsilon)},$$

und

$$z'_1 = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_0; \quad z'_2 = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \theta_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Sowohl z_1 und z_2 wie z'_1 und z'_2 sind kleiner als die Einheit.

Mittelst der Formeln (22*) und (24) lassen sich die trigonometrischen Functionen von q und ψ als Functionen von u_2 ausdrücken. Man gibt diesen Ausdrücken am Besten die Form FOURIER'scher Reihen, die nach Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von u_2 fortschreiten. Von diesen Reihen gebe ich die Ausdrücke für q und ψ hier wieder. Man bekommt sie aus (22*) und (24) indem man die Logarithmen der beiden Seiten nimmt. Man erhält dann

für $\varepsilon > \theta_0$:

$$(25) \quad \begin{aligned} q + u_1 &= -u_2 - \sum' (-1)^{s+1} \frac{1}{s} z_1^s \sin s u_2 \\ &\quad - \sum' (-1)^{s+1} \frac{1}{s} z_2^s \sin s u_2, \\ \psi + u_3 &= - \sum' (-1)^{s+1} \frac{1}{s} z_1^s \sin s u_2 \\ &\quad + \sum' (-1)^{s+1} \frac{1}{s} z_2^s \sin s u_2, \end{aligned}$$

und

für $\varepsilon < \theta_0$:

$$(26) \quad \begin{aligned} q + u_1 &= \sum' (-1)^{s+1} \frac{1}{s} z'_1{}^s \sin s u_2 \\ &\quad - \sum' (-1)^{s+1} \frac{1}{s} z'_2{}^s \sin s u_2, \\ \psi + u_3 &= u_2 - \sum' (-1)^{s+1} \frac{1}{s} z'_1{}^s \sin s u_2 \\ &\quad - \sum' (-1)^{s+1} \frac{1}{s} z'_2{}^s \sin s u_2. \end{aligned}$$

Im vorigen Falle — $\varepsilon > \theta_0$ — wächst $q + u_1$ mit $-u_2$ in's Unendliche, wogegen $\psi + u_3$ um Null oscillirt. Im zweiten Falle — $\varepsilon < \theta_0$ — oscillirt $q + u_1$ periodisch um den Werth Null, wogegen $\psi + u_3$ mit u_2 in's Unendliche wächst.

Diese Verhältnisse erklären sich leicht, indem man die geometrische Bedeutung der beiden Fällen vor den Augen hält. Es ist indessen offenbar eine grosse Unbequemlichkeit mit diesen beiden verschiedenen analytischen Ausdrücken zu operiren, und im Besonderen scheint es unter solchen Umständen sehr schwierig einen solchen Fall zu behandeln, wo ε und θ_0 einander sehr nahe liegen oder gar für einige Werthe der Zeit $\varepsilon > \theta_0$ und für andere $\varepsilon < \theta_0$ ist. Glücklicherweise lässt sich diese Schwierigkeit beseitigen, indem man *in beiden Fällen dieselbe Form für die Störungsfunction erhalten kann*. Das Rotationsproblem lässt sich deswegen ganz unabhängig von jeder Annahme über die relative Grösse von ε und θ_0 behandeln. Nur die expliciten Ausdrücke für die EULER'schen Winkel q und ψ durch u_1 , u_2 und u_3 wechseln, so dass man für $\varepsilon > \theta_0$ die Formeln (25) und für $\varepsilon < \theta_0$ die Formeln (26) zu benutzen hat.

Drückt man nämlich r_1 und r_2 durch die Winkel ε und θ_0 aus, so findet man in der That, dass in beiden Fällen folgende Ausdrücke für $q + u_1$ und $\psi + u_3$ stattfinden:

$$(27) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg}(q + u_1) &= \frac{2 \sin \varepsilon \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2}{\sin(\varepsilon + \theta_0) - \sin(\varepsilon - \theta_0) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} u_2} \\ \operatorname{tg}(\psi + u_3) &= \frac{2 \sin \theta_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2} u_2}{\sin(\varepsilon + \theta_0) + \sin(\varepsilon - \theta_0) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} u_2} \end{aligned}$$

Hieraus ist zwar noch nicht bewiesen, dass die Störungsfunction auch in beiden Fällen dieselbe Form bekommt, wir werden aber finden, dass dies der Fall ist. Es wird sich ausserdem herausstellen, dass man die Störungsfunction in *endlicher Form* — also ohne Anwendung unendlicher Reihen — durch die Grössen u_1 , u_2 , u_3 , α_1 , α_2 , α_3 ausdrücken kann.

Geometrisch lässt sich die Rotationsverhältnisse in folgender Weise voranschaulichen. Wir führen eine Hülfsachse OZ_0 ein, die ich mit dem Namen *Centralachse der Rotation* bezeichnen will. Ich werde unten näher angeben, warum dieser Name gewählt werden ist. Sie wird so gelegt, dass

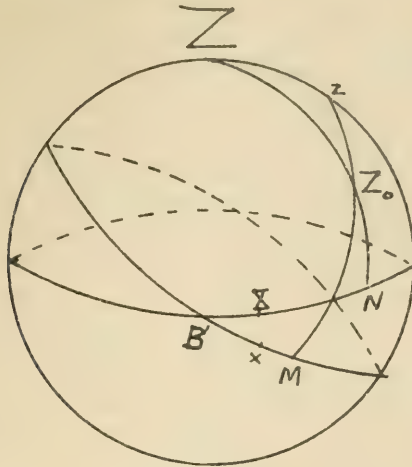


Fig. 1.

sie mit den Achsen OZ und Oz die Winkel ε und θ_0 bildet. Im sphärischen Dreieck ZzZ_0 hat man nun

$$\begin{aligned} Zz &= \theta, \\ zZ_0 &= \theta_0, \\ Z_0Z &= \varepsilon, \\ \sphericalangle Z_0Zz &= 90^\circ - \psi - \sphericalangle XN, \\ \sphericalangle ZzZ_0 &= 90^\circ + \varphi + \sphericalangle \bar{M}. \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$(28) \quad \begin{aligned} u_1 &= \sphericalangle \bar{M} + 90^\circ, \\ u_2 &= \sphericalangle zZ_0Z - 180^\circ, \\ u_3 &= \sphericalangle XN - 90^\circ, \end{aligned}$$

so dass die Winkel im sphärischen Dreieck die Werthe

$$\begin{aligned} \sphericalangle Z_0Zz &= -(\psi + u_3), \\ \sphericalangle ZzZ_0 &= \varphi + u_1, \\ \sphericalangle zZ_0Z &= 180^\circ + u_2 \end{aligned}$$

bekommen.

Es zeigt sich nun, dass aus dem sphärischen Dreieck dieselben Relationen zwischen der Grössen θ , φ , ψ und der

Grössen θ_0 , ε , u_1 , u_2 und u_3 folgen, die wir in (17) und (27) abgeleitet haben. Da u_1 und u_3 ebensowohl wie θ_0 und ε im jetzt behandelten Rotationsfall unveränderlich waren, so folgt hieraus im Folge (28), dass xM und XN unveränderlich sind. Dies bedeutet, dass die *Centralachse in diesem Falle eine unveränderliche Lage im Körper und im Raum einnimmt*. Da weiter nach (16) u_2 proportionel de Zeit wächst, so finden wir, dass die *Figurachse Oz einen circularen Kegel um die im Raum festliegende Centralachse beschreibt*.

Die *Rotationsgeschwindigkeit* hat nach (16) den Ausdruck

$$\frac{\omega_2}{C}$$

und die *Rotationsdauer* θ_0 beträgt

$$2\pi C \frac{1}{\omega_2}$$

Die *Rotationsachse* fällt hier mit der *Centralachse* zusammen. Dies ist aber nicht im gestörten Rotations-

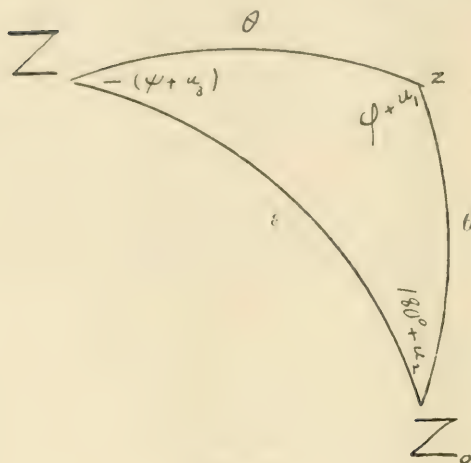


Fig. 2.

problem der Fall, auch nicht wenn man, ohne die äusseren Kräfte zu berücksichtigen, die Unterschiede der Trägheitsmomente A , B und C in Betracht zieht. Die *Centralachse* fällt dann mit der Achse der s. g. unveränderlichen Ebene zusammen. Es empfiehlt sich doch den Namen *Centralachse* zu behalten, theils weil die andere Benennung ziemlich umständlich ist, theils auch weil die »unveränderliche Ebene« nicht eine unveränderliche Lage hat, wenn die äusseren Kräfte in Betracht gezogen werden.

Aus dem sphärischen Dreieck ZzZ_0 folgen einige Relationen die wir für die Ableitung der Ausdrücke für die Störungsfunction brauchen, und die wir daher hier zusammenstellen. Man hat

$$(29) \begin{cases} \sin \theta \sin (\varphi + u_1) = -\sin \varepsilon \sin u_2, \\ \sin \theta \cos (\varphi + u_1) = \cos \varepsilon \sin \theta_0 + \sin \varepsilon \cos \theta_0 \cos u_2, \\ \cos \theta = \cos \varepsilon \cos \theta_0 - \sin \varepsilon \sin \theta_0 \cos u_2, \end{cases}$$

und

$$(29^*) \begin{cases} \sin \theta \sin (\psi + u_3) = \sin \theta_0 \sin u_2 \\ \sin \theta \cos (\psi + u_3) = \cos \theta_0 \sin \varepsilon + \sin \theta_0 \cos \varepsilon \cos u_2 \end{cases}$$

Weiter hat man

$$\begin{aligned} (a) \sin u_2 \sin \varepsilon &= -\sin (\varphi + u_1) \sin \theta, \\ (b) \sin u_2 \cos \varepsilon &= \cos (\varphi + u_1) \sin (\psi + u_3) - \sin (\varphi + u_1) \cos (\psi + u_3) \cos \theta, \\ (c) \cos u_2 &= \cos (\varphi + u_1) \cos (\psi + u_3) + \sin (\varphi + u_1) \sin (\psi + u_3) \cos \theta, \\ (d) \sin u_2 \sin \theta_0 &= \sin (\psi + u_3) \sin \theta, \\ (e) \sin u_2 \cos \theta_0 &= -\sin (\varphi + u_1) \cos (\psi + u_3) + \cos (\varphi + u_1) \sin (\psi + u_3) \cos \theta, \\ (f) -\sin \varepsilon \sin \theta_0 + \cos \varepsilon \cos \theta_0 \cos u_2 &= \\ &= \sin (\varphi + u_1) \sin (\psi + u_3) + \cos (\varphi + u_1) \cos (\psi + u_3) \cos \theta \end{aligned}$$

Die letzte Formel, die im folgenden von Nutzen ist, scheint nicht sehr bekannt zu sein. Ich fand sie in einem Beispiel zu TODHUNTER's sphärischen Trigonometrie (2^{te} Auflage s. 43) und lautet mit der gewöhnlichen Bezeichnungswiese der sphärischen Trigonometrie

$$\sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B \cos c.$$

Sie kann mit Hülfe der Polardreiecke bewiesen werden und ist, beiläufig bemerkt, als Controllformel sehr brauchbar, da sie alle sechs Elemente des sphärischen Dreiecks enthält.

Werden die zwei ersten Gleichungen (29) und die beiden Gleichungen (29*) mit einander dividirt, erhält man die Formeln (27).

Nach dem der Fall der Rotation eines Kugelförmigen Körpers somit, mit der Ausführlichkeit, die durch die grundlegende Bedeutung dieser Betrachtungen für das folgende bedingt war, auseinandergesetzt worden ist, gehen wir zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen, welche für die Behandlung des allgemeinen Rotationsproblems benutzt werden sollen, über.

Setzt man

$$(30) \quad S = c_1 q_1 + c_2 q_2 + \int \frac{dq_3}{\sin q_3} \sqrt{c_3^2 \sin^2 q_3 - a_1^2 - a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos q_3}$$

so ist nach (8), (9) und (16)

$$(31) \quad \frac{dS}{dq_i} = p_i; \quad \frac{dS}{da_i} = u_i \\ (i = 1, 2, 3)$$

Statt der Grössen $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$, die nach (1) die Bewegung im allgemeinen Rotationsproblem bestimmen, können wir $a_1, a_2, a_3, u_1, u_2, u_3$ als neue Veränderlichen einführen und im Folge der Gleichungen (31) hat man nun nach dem JACOBI'schen Transformationstheorem zur Bestimmung der Bewegung die Gleichungen

$$(32) \quad \frac{da_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u_i}; \quad \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial a_i} \\ (i = 1, 2, 3),$$

welche ich der Untersuchung der Rotation der Planeten und des Mondes zu Grunde gelegt habe.

Was die mechanische Bedeutung der neuen Veränderlichen $a_1, a_2, a_3, u_1, u_2, u_3$ betrifft, erinnere ich daran, dass man hat:

$a_2 = C_{\times}$ Rotationsgeschwindigkeit des Körpers um die Centralachse;

$a_1 = a_2 \cos \theta_0$,

$a_3 = a_2 \cos \varepsilon$,

wo θ_0 und ε die Winkel bezeichnen, welche die Centralachse mit der im Körper festen z Achse bez. der im Raum festen Z Achse bildet.

Weiter ist

$u_1 = 90^\circ + xM$,

wo xM die Länge der Centralachse, auf die im Körper feste xy -Ebene bezogen, bezeichnet (vergl. Fig. 1),

$u_3 = XN - 90^\circ$,

wo XN die Länge der Centralachse, auf die im Raume feste XY -Ebene bezogen, bezeichnet,

$180^\circ + u_2 =$ dem Winkel zwischen $Z_0 z$ und $Z_0 Z$ (vergl. Fig. 2).

Nachdem aus (32) die Werthe der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, u_1, u_2, u_3$ bestimmt worden sind, erhält man θ aus der Formel

$$\cos \theta = \cos \theta_0 \cos \varepsilon - \sin \theta_0 \sin \varepsilon \cos u_2.$$

Die beiden übrigen EULER'schen Winkel, welche mit θ zusammen die Lage der im Körper festen x, y, z Achsen zu den im Raume festen Achsen X, Y, Z bestimmen, erhält man aus (25) oder (26) jenachdem $\varepsilon > \theta_0$ oder $\varepsilon < \theta_0$ ist. In beiden Fällen kann man sie auch aus den Gleichungen (27) erhalten. Die Reihenentwicklungen (25) und (26) sind aber in practischer Hinsicht vorzuziehen.



Tryckt den 4 februari 1908.





UNIVERSITY OF TORONTO
LIBRARY
PLEASE LEAVE THIS CARD
IN BOOK POCKET

HARLIER C VWEINE NEUE METHODE ZUR BEHANDLUNG

PASC
LOCATION

MAIN ENTRY

